数理解析研究所講究録
1026 巻 1998 年 214-223

THE LEFSCHETZ HYPERPLANE SECTION THEOREM FOR ETALE HOMOTOPY GROUPS

松浦篤司 (東大数理)
ATSUSHI MATSUURA

1. INTRODUCTION

X を複素射影空間 $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ の d 次元連結閉部分代数多様体とする．このとき，古典的な Lefschetz hyperplane section theorem は次のようになる．

Lefschetz の定理．(1)H を $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ *generic* な超平面とすると，$i < d$ なる i にたいし，

$$H_i(X, X \cap H) = 0.$$

(2) さらに，$i < d$ のとき，$\pi_i(X, X \cap H) = 0$ も成り立つ．

M. Raynaud はエタールコホモロジー群に対して類似の結果を示した ([6, XIV]) ．これは，エタール位相に関して上の定理の (1) に相当する．本稿では高次エタールホモトピー群に対して，(2) に対応する結果を述べる．

証明のアイデアは，ホモトピー群の結果をコホモロジー群の結果に帰着することである．すなわち，ある種の Whitehead の定理を示すことである．§2 に於いて，古典的な Whitehead の定理の拡張を pro-homotopy 圏の場合に示し，その応用として § 4 で高次エタールホモトピー群に対する Lefschetz hyperplane section theorem を述べる．主結果 (Theorem 4.3) は次のようになる:

主定理．k **を代数閉体とし，**X **を** $\mathbb{P}^n_k$ **の** d **次元の非特異で連結な閉部分代数多様体とする．**$\mathbb{P}^n_k$ **の** *generic hyperplane* H **に対し** $Y = X \cap H$ **と置く．また，**$d \geq 3$ **とする．**

$$\pi_i((Y)^{\widehat{}}_{et}) \to \pi_i((X)^{\widehat{}}_{et})$$

は $i < d-1$ **で同型,** $i = d-1$ **で全射となる．**

ここで，$\mathbb{L}$ を素数の集合で k の標数を含まないものとし，$(X)^{\widehat{}}_{et}$, $(Y)^{\widehat{}}_{et}$ は X および Y のエタールホモトピー型の pro-$\mathbb{L}$ 完備化とする．$\pi_i((X)^{\widehat{}}_{et}), \pi_i((Y)^{\widehat{}}_{et})$ はその高次 pro-homotopy 群である．これらの定義は本文で述べる．

2. Generalized Whitehead theorem for pro-CW-complexes

古典的な Whitehead の定理は次のようになる（ theorem[10, Ch.7, §5, Thm. 9]）：

定理 2.1 (Whitehead). X, Y を弧状連結な基点付き空間, $f\colon (X,x_0) \to (Y,y_0)$ をその間の写像とする．ある $n \geq 1$ に対し，

$$f_\sharp\colon \pi_q(X,x_0) \to \pi_q(Y,y_0)$$

が $q < n$ で同型で $q = n$ で全射となるならば，

$$f_*\colon H_q(X,x_0) \to H_q(Y,y_0)$$

は $q < n$ で同型，$q = n$ で全射．

X および Y が単連結の場合には逆に，f_* が $q < n$ で同型で $q = n$ で全射ならば $f_\sharp$ も $q < n$ で同型，$q = n$ で全射となる．

$\mathfrak{C}$ を圏とする．$\mathfrak{C}$ に fibre products が存在すれば $\mathfrak{C}$ に値を持つ simplitial objects の圏では n-truncation functor は右随伴関手 (n-coskelton functor) を持つ (Artin-Mazur [1, §1]).

以後，CW-複体のホモトピー圏 $\mathcal{H}$ と simplicial sets のホモトピー圏 $\mathcal{K}$ を同一視する (Bousfield-Kan [2, Ch. VIII]).. $X \in \mathcal{H}$ に対し，X の n-coskelton を $cosk_n(X)$ とかく．$cosk_n(X)$ のホモトピー群は$\geq n$ 次元以上で消え，$i < n$ のとき

$$\pi_i(cosk_n(X)) \simeq \pi_i(X)$$

となる．また，X からホモトピー次元が n 以下の CW-複体への射に対し，

$$X \longrightarrow cosk_n(X)$$

は universal .

$\mathfrak{C}$ の pro-object とは，ある small filtering index category I から $\mathfrak{C}$ への反変関手

$$X\colon I^\circ \rightsquigarrow \mathfrak{C}$$

のことである．これをしばしば $X = \{X_i\}_{i\in I}$. とも書く． $\mathfrak{C}$ の pro-objects のなす圏を pro-$\mathfrak{C}$ で表わす．$X = \{X_i\}_{i\in I}, Y = \{Y_j\}_{j\in J} \in$ pro-$\mathfrak{C}$ に対し，pro-$\mathfrak{C}$ における射を

$$\mathrm{Hom}_{\text{pro-}\mathfrak{C}}(X,Y) := \varprojlim_j \varinjlim_i \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X_i,Y_j)$$

で定義する（詳細は [1, Appendix 2] を参照）．

基点付き連結 CW 複体のホモトピー圏を $\mathcal{H}$ ，$X = \{X_i\}_{i\in I} \in$ pro-$\mathcal{H}$ を pro-CW 複体とする．このとき，アーベル群 A にたいして X のホモ

トピー群とコホモロジー群を

$$\pi_n(X) := \{\pi_n(X_i)\}_{i\in I} \in \text{pro-}(Groups)$$
$$H^n(X, A) := \varinjlim_i H^n(X_i, A) \in (Groups)$$

で定義する．

$\mathcal{C}$ を 群の Serre 類とし，ホモトピー群がすべて $\mathcal{C}$ に含まれる CW 複体からなる $\mathcal{H}$ の部分圏 を $\mathcal{CH}$ とすると，包含関手

$$\text{pro-}\mathcal{C} \rightsquigarrow \text{pro-}(Groups)$$

および

$$\text{pro-}\mathcal{CH} \rightsquigarrow \text{pro-}\mathcal{H}$$

は左随伴関手

$$\hat{}: \text{pro-}(Groups) \rightsquigarrow \text{pro-}\mathcal{C}$$

および

$$\hat{}: \text{pro-}\mathcal{H} \rightsquigarrow \text{pro-}\mathcal{CH}$$

をもつ．これを $\mathcal{C}$-完備化とよぶ ([1, §3]).

pro-CW 複体 $X = \{X_i\}_{i\in I}$ に対し，X の coskelton を

$$cosk_n(X) := \{cosk_n(X_i)\}_{i\in I}$$

とする．次の定理は Whitehead の定理の pro-ホモトピー圏における拡張である：

定理 2.2. n は 2 以上で， $f: X \longrightarrow Y$ を基点付き *pro-CW*-複体 X, Y の射 とする．

(i) $\pi_1(X)\hat{} \simeq \pi_1(Y)\hat{}$ で，任意の *twisted coefficient module* $M \in \mathcal{C}$ に対して

$$H^q(Y, M) \longrightarrow H^q(X, M)$$

が $q < n$ で同型で $q = n$ で単射

と仮定する．このとき

(ii) $cosk_n(\hat{f}): cosk_n(\widehat{X}) \to cosk_n(\widehat{Y})$ は同型で

$$\pi_n(\widehat{X}) \longrightarrow \pi_n(\widehat{Y})$$

は全射

となる．

Remark . 実は，(i) と (ii) は同値であるが，ここでは必要ないので証明は略する．

[1, Theorem 4.3] において， M. Artin と B. Mazur は $n = +\infty$ の場合を証明している．上の定理はその拡張になっている．

Proof. 証明には障害理論を使う.
　写像

$$cosk_n(\hat{f})\colon cosk_n(\widehat{X}) \to cosk_n(\widehat{Y})$$

が同型であることは次と同値：
　ホモトピー次元$< n$の任意のCW-複体$W \in \mathcal{CH}$にたいして

$$\begin{aligned}[cosk_n(\widehat{Y}), W] &= [\widehat{Y}, W] \\ &= [Y, W] \\ &\xrightarrow{f^*} [X, W] \\ &= [\widehat{X}, W] \\ &= [cosk_n(\widehat{X}), W]\end{aligned}$$

は同型. すなわち任意の写像$\varphi : X \to W$にたいし, homotopy-commutativeな図式

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & Y \arrow[dl, "\psi"] \\ & W & \end{tikzcd}$$

　が存在し, ψホモトピーをのぞいて一意. 仮定(i)の$\pi_1(X)\hat{} \simeq \pi_1(Y)\hat{}$により, 写像$\varphi : X \to W$は一意に

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \pi_1(Y) \arrow[dl] \\ & \pi_1(W), & \end{tikzcd}$$

と分解される. 従って

$$\begin{tikzcd} K(\pi_1(X),1) \arrow[rr] \arrow[dr] & & K(\pi_1(Y),1) \arrow[dl] \\ & K(\pi_1(W),1) & \end{tikzcd}$$

は可換でf^*は$n = 2$のとき同型.

一般の n に対しては，f^* の全射性を帰納法で示す．ホモトピー次元 $<n$ の任意の W に対し，

$$[Y, cosk_{n-1}(W)] \to [X, cosk_{n-1}(W)]$$

は全射と仮定する．

仮定により，任意の射$\varphi: X \to W$に対し，ある添字iおよび homotopy commutative な図式

$$\begin{array}{ccc} X_i & \longrightarrow & Y_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ W & \longrightarrow & cosk_{n-1}(W) \end{array}$$

が存在する．このとき，ある $i \to i''$ および持ち上げ $\psi: Y_{i''} \to W$ で，図式

$$\begin{tikzcd} X_{i''} \arrow[rr] \arrow[d] & & Y_{i''} \arrow[d] \arrow[dll, dashed, "\psi"'] \\ W \arrow[rr] & & cosk_{n-1}(W) \end{tikzcd}$$

を homotopy-commutative にするものが存在することを示す．.

このようなψ の存在に対応する障害類は

$$\mathfrak{o}_i \in H^n(Y_i, X_i, \pi),$$

である．ここで$\pi := \pi_{q-1}(W)$.

長完全列

$$\cdots \to H^{n-1}(Y_i, \pi) \to H^{n-1}(X_i, \pi) \xrightarrow{\delta} H^n(Y_i, X_i, \pi) \xrightarrow{\eta} H^n(Y_i, \pi) \to \cdots$$

および仮定(i)より，$i \to i'$で

$$\eta\mathfrak{o}_i = 0 \quad \text{in} \quad H^n(Y_{i'}, X_{i'}, \pi)$$

となるものが存在する．ただし，このとき次の図式

$$\begin{array}{ccc} X_{i'} & \longrightarrow & Y_{i'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_i & \longrightarrow & Y_i \end{array}$$

が実際に可換となるようにi'を選ぶ．これは、up to homotopy で可換なだけでなく，CW 複体の射として実際に可換であることを意味する．

すると，

$$H^n(Y_i, X_i, \pi) \to H^n(Y_{i'}, X_{i'}, \pi),$$

による $\mathfrak{o}_i$ の像は $\mathfrak{o}_{i'}$ になる．よって $\eta\mathfrak{o}_{i'}=0$．
　また、上と同様のコホモロジー長完全列によって，

$$\chi' \in H^{n-1}(X_{i'},\pi)$$

で $\delta\chi'=\mathfrak{o}_{i'}$. となるものをえる．さらに

$$H^{n-1}(Y,\pi)\simeq H^{n-1}(X,\pi)$$

だから，$H^{n-1}(X_{i''},\pi)$ における χ' の像 χ'' がある $\varrho''\in H^{n-1}(Y_{i''},\pi)$ から来ている様な $i'\to i''$ が存在する．図式

$$\begin{array}{ccc} X_{i''} & \longrightarrow & Y_{i''} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{i'} & \longrightarrow & Y_{i'} \end{array}$$

を実際に可換にする i'' を選ぶ．構成から，障害類 $\mathfrak{o}_{i'}$ の写像

$$H^n(Y_{i'},X_{i'},\pi)\longrightarrow H^n(Y_{i''},X_{i''},\pi)$$

による像は0．従って，持ち上げ ψ の存在がいえた．
　一意性の証明も同様である．
　最後に，

$$\pi_n(\widehat{X})\longrightarrow\pi_n(\widehat{Y})$$

が全射であることを示す．

補題 2.3. $V\in$ *pro-*$\mathcal{H}$ とする．任意の $k\geq 1$ および任意のアーベル群 $G\in\mathcal{C}$ にたいし，

$$\mathrm{Hom}_{(pro-group)}(\pi_k(\widehat{V}),G)\simeq[V,K(G,k)].$$

Proof. $\widehat{V}=\{V_i\}$ とおく．胞体近似定理および coskelton functor の普遍性より，

$$[V_i,K(G,k)]\simeq[K(\pi_k(V_i),k),K(G,k)].$$

一方，普遍係数定理と Hurewicz の定理により

$$\begin{aligned}[K(\pi_k(V_i),k),K(G,k)] &\simeq H^k(K(\pi_k(V_i),k),G)\\ &\simeq \mathrm{Hom}(H_k(K(\pi_k(V_i)),k),G)\\ &\simeq \mathrm{Hom}(\pi_k(V_i),G).\end{aligned}$$

となる．よって，任意の i に対して $\mathrm{Hom}(\pi_k(V_i),G)\simeq[V_i,K(G,k)]$ である．ここで順極限をとって，

$$\varinjlim_i \mathrm{Hom}(\pi_k(V_i),G)\simeq\varinjlim_i\,[V_i,K(G,k)].$$

さらに，$K(G,k) \in \mathcal{CH}$ だから

$$[V, K(G,k)] \simeq [\widehat{V}, K(G,k)].$$

従って補題2.3. が示された. □

定理の証明にもどる. $G \in \mathcal{C}$ をアーベル群とする. 補題 2.3 によって

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{(pro-group)}(\pi_n(\widehat{Y}), G) &\simeq \varinjlim_i [Y_i, K(G,n)] \\
&\simeq \varinjlim_i H^n(Y_i, G) \\
&\hookrightarrow \varinjlim_j H^n(X_j, G) \\
&\simeq \varinjlim_j [X_j, K(G,n)] \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{(pro-group)}(\pi_n(\widehat{X}), G),
\end{aligned}$$

であるが，これは$\pi_n(\widehat{X}) \to \pi_n(\widehat{Y})$ の全射性と同値. □

3. Review of the cohomological Lefschetz hyperplane section theorem

X を scheme とし，$\mathcal{F}$ を etale site X_{et}上のアーベル層とする. 任意の点 $x \in X$ にたいして x 上の geometric point を$\overline{x}$と書く. $\overline{x}$における X の strict henselizationon を$\overline{X}$とし，$\overline{X}$上の $\mathcal{F}$ の inverse image を$\overline{\mathcal{F}}$とする.

定義 3.1. $\overline{x}$における etale cohomological depth が n 以上である，すなわち

$$prof_{\overline{x}}(\mathcal{F}) \geq n,$$

とは $q < n$ のとき常に $\mathcal{H}^q_{\overline{x}}(\overline{\mathcal{F}}) = 0$ となることである. ここで $\mathcal{H}^q_{\overline{x}}(\overline{\mathcal{F}})$ は前層 $(X' \to \overline{X}) \mapsto H^q_{X'_{\overline{x}}}(X', \mathcal{F}')$ に付随する層 である.

このとき，エタールコホモロジー群に対する Lefschetz の定理は次のようになる ([6, XIV, 4.6])：

定理 3.2 (Raynaud). k を体，X/k を *proper scheme* とする. $U \subset X$ は *open subshceme* で，$c+1$ 個の *affine open subscheme* の合併になっているものとする. $Y \subset X$ を *closed subscheme* で，その *underlying space* は $X \setminus U$ であるとする. 包含写像を $j\colon Y \to X$ とする.

X_{et}上の $\mathbb{Z}/m$-加群の *constructible sheaf* $\mathcal{F}$ および整数 n に対し，各点 $u \in U$ で

$$prof_u(\mathcal{F}) \geq n - \dim(\overline{\{u\}})$$

であるとする. このとき

$$H^i(X, \mathcal{F}) \to H^i(Y, j^*\mathcal{F})$$

は $i < n-c-1$ で同型，$i = n-c-1$ で単射．

4. Homotopical Lefschetz theorem

まず，エタールホモトピー型の定義を説明する．([1], [4])．X を連結で局所 noetherian なスキーム，$\bar{x}$をその geometric point とする．X_{et}を X 上の（基点付き）エタール site とする．

定義 4.1. *etale hypercovering* $U_\bullet$とは，X_{et}に値を持つ基点付きの simplicial object で，次の条件をみたすものである：

(1) 写像 $U_0 \to X$ はエタール被覆．

(2) $n \geq 0$ に対し，標準写像

$$U_{n+1} \to (cosk_n(U_\bullet))_{n+1}$$

はエタール被覆．

$HR(X)$ で X 上の基点付き etale hypercoverings のなす圏を表わすことにすると，connected component functor Πによって $HR(X)$ を添数集合とする simplicial sets

$$U_\bullet \in HR(X) \rightsquigarrow \Pi(U_\bullet) \in (s.sets)$$

が得られる．双対圏 $HR(X)^\circ$ は filtering である．(Verdier's Theorem, [7, V, Th. 7.3.2])．こうして，pro-simplicial set

$$\{\Pi(U_\bullet)\}_{U_\bullet \in HR(X)}$$

が定まる．simplicial sets の幾何的実現は CW 複体なので我々は pro-CW 複体 $(X)_{et}$を得る．これを X の エタールホモトピー型と呼ぶ．

次の定理は J.L. Verdier によって示された．([7, V, Th. 7.4.1])：

定理 4.2 (Verdier). $\mathcal{F}$ を X_{et}上のアーベル層とすると，$q \geq 0$ に対して標準的な同型

$$H^q(X_{et}.\mathcal{F}) = \varinjlim_{U_\bullet \in HR(X)} H^q(\mathcal{F}(U_\bullet))$$

が定まる．ここで，右辺は *cosimplicial group* $\mathcal{F}(U_\bullet)$ のコホモロジー群である．

さらに，X_{et}の任意の局所定数アーベル層 A に対し，対応する局所系も A で表わすと，自然な同型

$$H^q_{et}(X, A) \simeq H^q((X)_{et}, A)$$

が存在する．

代数閉体k上の射影空間 $\mathbb{P}^n$に対し，X をその非特異で連結な d次元閉部分代数多様体とする．$\mathbb{P}^n$の generic hyperplane H に対し，$Y = X \cap H$ とおく．$\iota : Y \hookrightarrow X$ を包含写像とする．Y も連結な $n-1$ 次元 smooth variety としてよい．

素数の集合$\mathbb{L}$でkの標数を含まないものを考える．位数が$\mathbb{L}$の元の積になっているものからなる有限群のSerre類を$\mathcal{C}_{\mathbb{L}}$とするとき，$\mathcal{C}_{\mathbb{L}}$-完備化を$\hat{}$で表わす．

定理 4.3. 上の仮定において，$\dim(X) = d \geq 3$とする．このとき，写像

$$\pi_i((Y)\hat{_{et}}) \to \pi_i((X)\hat{_{et}})$$

は$i < d-1$で同型，$i = d-1$で全射．

Proof. 定理を証明するためにまず次を示す．

命題 4.4. 定理*4.3*が成り立つには

$$H^i_{et}(Y, M) \longrightarrow H^i_{et}(X, M)$$

が$i < d-1$で同型で，$i = d-1$で単射になることが必要十分である．

Proof of Proposition 4.4. Yが正規で次元が2以上のとき，Grauert's theoremのetale analogueにより，基本群の写像

$$\pi_1((Y)_{et}) \to \pi_1((X)_{et})$$

は同型. ([6, XII Cor.3.5])．さらに，任意のpro-CW複体に対し，$\mathcal{C}$-完備化をとる操作と基本群をとる操作は可換．(Artin-Mazur [1, Cor. 3.7])..したがって，定理2.2より

$$\iota_* \colon \pi_i((Y)\hat{_{et}}) \longrightarrow \pi_i((X)\hat{_{et}})$$

が$i < d-1$ (resp. $i = d-1$) に対して同型 (resp. 全射) となるのは，任意のtwisted module $M \in \mathcal{C}_{\mathbb{L}}$に対して

$$H^i((Y)_{et}, M) \longrightarrow H^i((X)_{et}, M)$$

が$i < d-1$ (resp. $i = d-1$) に対して同型 (resp. 単射) となることと同値．

ここで，

$$H^i((X)_{et}, M) \simeq H^i_{et}(X, M)$$

および

$$H^i((Y)_{et}, M) \simeq H^i_{et}(Y, M)$$

が成り立つのでこれは次と同値となる：写像

$$H^i_{et}(Y, M) \longrightarrow H^i_{et}(X, M)$$

は$i < d-1$で同型，$i = d-1$で単射． □

我々の場合，$U = X \setminus Y$はsmoothであり，$\mathcal{F}$のtorsionはkの標数と互いに素である．従ってsmooth purity theorem ([7, XVI Th. 3.7])から，$i < 2\mathrm{codim}\,\overline{u}$の時

$$\mathcal{H}^i_{\overline{u}}(\overline{\mathcal{F}}) = 0$$

となる．よって，

$$prof_u(\mathcal{F}) \geq d - \dim\{\overline{u}\}.$$

U は affine なので，定理 3.2 により

$$H^i_{et}(Y, M) \longrightarrow H^i_{et}(X, M)$$

$i < d - 1$ で同型，$i = d - 1$ で単射. □

上の定理からすぐ次のことがわかる.

系 4.5. $n \geq 2$ とする. 次数 d の *generic hypesurface* $X \subset \mathbb{P}^n$ *of* に対し，

$$\pi_i((X)^{\wedge}_{et}) \longrightarrow \pi_i((\mathbb{P}^n)^{\wedge}_{et})$$

は $i < n - 1$ で同型，$i = n - 1$ で全射.

Acknowledgment. The author would like to thank his thesis advisor Professor Takayuki Oda, for suggesting the problem and for valuable discussions.

References

[1] M. Artin and B. Mazur: *Etale Homotopy*, L. N. M. 100, Springer-Verlag, Berlin and New York (1969).

[2] A.K. Bousfield and D.M. Kan: *Homotopy Limits, Completions and Localizations*, L. N. M. 304, Springer-Verlag, Berlin and New York (1972).

[3] E. Freitag and R. Kiehl: *Etale Cohomology and The Weil Conjecture*, Springer-Verlag, Berlin and New York (1988).

[4] E.M. Friedlander: *Etale Homotopy of Simplicial Schemes*, Princeton Univ. Press (1982).

[5] M. Goresky and R. MacPherson: *Stratified Morse Theory*, Springer-Verlag, Berlin and New York (1980).

[6] A. Grothendieck: *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et Théorèmes de Lefschetz locaux et globaux* (*SGA 2*), North-Holland Publishing Company (1962).

[7] A. Grothendieck (with M. Artin and J.L. Verdier): *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas* (*SGA 4*), L. N. M. 269, 270,305, Springer-Verlag, Berlin and New York (1972-73).

[8] J.S. Milne: *Étale Cohomology*, Princeton Univ. Press (1980).

[9] J. Milnor: *Morse Theory*, Princeton Univ. Press (1969).

[10] E.H. Spanier: *Algebraic Topology*, McGraw-Hill (1966).

Department of Mathematical Sciences
University of Tokyo
Japan
E-mail address: `matsuura@ms.u-tokyo.ac.jp`